

**ANALISIS ECONOMICO DE LA
OFERTA.
EL ENFOQUE DUAL Y SUS
APLICACIONES.**

La Función de Producción

- **Dados los insumos $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, y el producto y , tenemos:**

$$y = f(x_1,\dots,x_n) = f(\mathbf{x})$$

- **Propiedades:**

- **Creciente:** $\partial f / \partial x > 0$

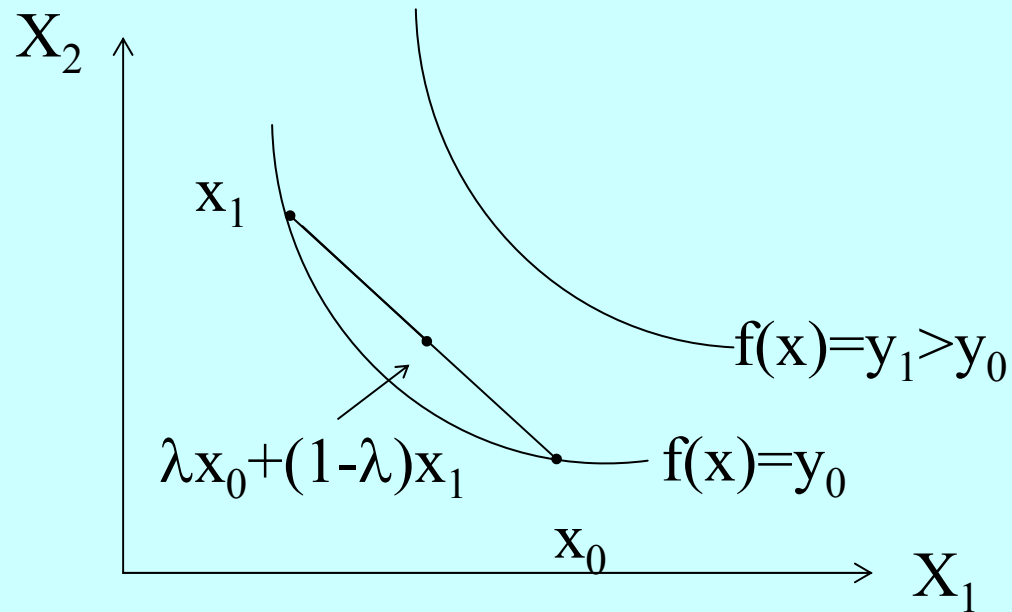
- **Cuasi-cóncava:**

- Si $f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_1)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$

- Entonces $f(\lambda \mathbf{x}_0 + (1-\lambda)\mathbf{x}_1) \geq f(\mathbf{x}_0)$

La Función de Producción

□ Isocuantas y Convexidad:



Retornos a Escala

- Supongamos que la función de producción es:

$$y = f(x) = x^{\alpha}$$

$\alpha=1 \Rightarrow$ retornos a escala constantes

- Duplicando los insumos, se duplica el producto
- $\alpha>1 \Rightarrow$ retornos a escala crecientes: duplicando los insumos más que se duplica el producto
- $\alpha<1 \Rightarrow$ retornos a escala decrecientes: duplicando los insumos menos que se duplica el producto

DUALIDAD EN PRODUCCION

DUALIDAD EN PRODUCCION

- ❑ Concepto de Dualidad: si existe una función de costo que cumpla ciertas condiciones de regularidad, también existe una función de producción y ambas representan la misma tecnología.
- ❑ La misma relación se encuentra entre la función de beneficios y la función de producción.

DUALIDAD EN PRODUCCION

Esto implica que hay diferentes maneras de representar la misma tecnología:

- A través de la función de producción (enfoque primal)
- A través de las funciones de costos y beneficios (enfoque dual).

Usos del Enfoque Dual

- Es un camino más fácil para obtener funciones de ofertas de productos y de demanda de insumos.
- El dual se puede usar también para estimar y descomponer la ineficiencia en costos, a través de una frontera de costos y sus respectivos componentes, eficiencia técnica y asignativa.
- El dual hace posible también la medición de la eficiencia en beneficios.
- Las funciones de Costo y de beneficios pueden trabajar fácilmente con múltiples productos e insumos.
- Las funciones de Costos y beneficios facilitan una clara distinción entre insumos fijos y variables.

Función de beneficios Dual

x_i = insumo i
 w_i = precio insumo i
 Y = producto
 P = precio

Sustituyendo en $y = f(x)$

$$x_i^*(w_1, w_2, p)$$

Demanda de Insumos
(no condicionada)

Resolver

$$\text{Max}[p * f(x_1, x_2) - (x_1 w_1 + x_2 w_2)]$$

x_1, x_2

Sustituyendo x^* en
 $\pi = p * f(x_i) - x_1 w_1 - x_2 w_2$

Diferenciando π con respecto a w_i

Lema de Hottelling

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_i} = -x_i^*(w_1, w_2, p) \leq 0$$

$$y^*(w_1, w_2, p)$$

Función de oferta

Resolver

$$\text{Max}[p * y - C(w_1, w_2, y)]$$

y

Sustituyendo y^* en
 $\pi = p * y - C(w_i, y)$

Diferenciando π con respecto a p

Lema de Hottelling

$$\frac{\partial \Pi}{\partial P} = y^*(w_1, w_2, p) > 0$$

$$\Pi(w_1, w_2, p)$$

Función de beneficios

Función de Costos Dual

$$\text{Min}(w_1x_1 + w_2x_2)$$

$$\text{st} : \bar{y} = f(x_1, x_2)$$

donde:

x_i = insumo i

w_i = precio insumo i

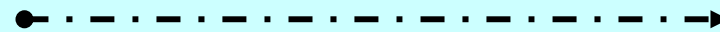
Y = producto

Resolver

$$x_i(w_1, w_2, \bar{y})$$

Demanda
Condicional de
insumos

Sustituyendo en $w_1x_1 + w_2x_2$



$$C(w_1, w_2, \bar{y})$$

Función de
Costos dual



Diferenciando con respecto a w_i

Lema de Shephard

$$\frac{\partial C(w_i, \bar{y})}{\partial w_i} = x_i(w_1, w_2, \bar{y})$$

Funciones de Dualidad:

Corto y Largo Plazo

- Costo Total (CT) $= f(w_i; y)$
- Costo Variable Total (CVT) $= f(w_i; y, z)$
- beneficiosTotal (π) $= f(p, w_i)$
- beneficios Variable Total (πVT) $= f(p, w_i; z)$

Costos y Beneficios

Función de Costos: Propiedades

Si f es continua y estrictamente creciente, entonces $c(w,y)$ es

1. Cero cuando $y=0$
2. Creciente en w .
3. Homogénea de grado uno en w .
4. Cóncava en w .
5. Si f es estrictamente cuasi-cóncava podemos aplicar el lema de Shephard: $c(w,y)$ es diferenciable en w (w^0, y^0) siempre que $w \gg 0$ y

$$x_i(w^0, y^0) = \partial c(w^0, y^0) / \partial w_i$$

Maximización de beneficios

- ❑ **Mercado Competitivo:** Los productores individuales son tomadores de precios de los insumos y productos (bienes).
- ❑ **Comportamiento Racional:** Las firmas maximizan beneficios (beneficio es la diferencia entre ingresos y costos de producción)

Propiedades de la Función de beneficios

□ Dado f , y considerando un $p \geq 0$ y $w \geq 0$, la función de beneficios $\pi(p, w)$, estará bien definida, será continua y

1. creciente en p
2. Decreciente en w .
3. Homogénea de grado uno en (p, w)
4. Convexa en (p, w)
5. *Lema de Hotelling*

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial p} = y(p, w) \text{ and } \frac{-\partial \pi(p, w)}{\partial w_i} = x_i(p, w)$$

Dualidad

□ Maximización de beneficios:

$$\max \pi(\underline{x}) = \max_x \{pf(\underline{x}) - w\underline{x}\} \rightarrow x^*(w, p)$$

$$\max \pi(\underline{y}) = \max_y py - C(w, y) \rightarrow y^*(w, p)$$

□ Minimización de costos

$$\left. \begin{array}{l} \min C(\underline{x}) = \min_x \underline{w}'\underline{x} \\ s.a. y = \bar{y} \end{array} \right\} \rightarrow x^*(w, y)$$

Teorema de la Envolvente

1) Sin restricciones

□ **Función objetivo:** $\max_{x_1, x_2} y = \max_{x_1, x_2} f(x_1, x_2; \alpha)$

$$f_1 = f_2 = 0 \rightarrow x_i = x_i^*(\alpha) \quad i = 1, 2$$

□ **Función objetivo indirecta:**

$$\phi(\alpha) = f(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha); \alpha) \quad (\text{función de máximo valor})$$

$$\phi_\alpha(\alpha) = f_1 \frac{\partial x_1^*}{\partial \alpha} + f_2 \frac{\partial x_2^*}{\partial \alpha} + f_\alpha$$

$$\phi_\alpha(\alpha) = f_\alpha|_{x=x^*(\alpha)}$$

Teorema de la Envolvente

1) Sin restricciones

□ Función objetivo indirecta:

$$f(\underline{x}(\alpha); \alpha)$$

$$\Delta\alpha \rightarrow \begin{cases} \Delta f \rightarrow \text{efecto directo} \\ \Delta x \rightarrow \Delta f \rightarrow \text{efecto indirecto} = 0 \end{cases}$$

Teorema de la envolvente

2) Con restricciones

□ Función objetivo:

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\underline{x}} f(\underline{x}, \alpha) \\ \text{s.a. } g(\underline{x}, \alpha) \leq 0 \end{array} \right\} L(\underline{x}, \alpha, \lambda) = f(\underline{x}, \alpha) - \lambda g(\underline{x}, \alpha) \rightarrow \underline{x}^*(\alpha)$$

□ Función objetivo indirecta:

$$\phi(\alpha) = f(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha), \alpha)$$

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = f_1 \frac{dx_1^*}{d\alpha} + f_2 \frac{dx_2^*}{d\alpha} + f_\alpha$$

Teorema de la envolvente

2) Con restricciones

□ Función objetivo indirecta:

■ Condición de primer orden:

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = \lambda g_1 \frac{dx_1^*}{d\alpha} + \lambda g_2 \frac{dx_2^*}{d\alpha} + f_\alpha$$

$$g(x_1^*(\alpha), x_2^*(\alpha); \alpha) \equiv 0 \rightarrow \text{óptimo}$$

$$g_1 \frac{dx_1^*}{d\alpha} + g_2 \frac{dx_2^*}{d\alpha} + g_\alpha = 0$$

Teorema de la envolvente

2) Con restricciones

□ Función objetivo indirecta:

■ Condición de primer orden:

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = -\lambda g_{\alpha} + f_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \alpha}$$

$$\phi_{\alpha}(\alpha) = \nabla_{\alpha} L(x^*, \lambda^*, \alpha) \Big|_{\substack{x=x^* \\ \lambda=\lambda^*}}$$

$$\Delta \alpha \begin{cases} \Delta L \\ \Delta x \\ \Delta \lambda \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \text{efecto directo} \\ \rightarrow \text{efecto indirecto} \end{matrix} \rightarrow \Delta L = 0$$

Maximización del beneficio

$$\max \pi(\underline{x}) = \max_x \{py - w_1x_1 - w_2x_2\}$$

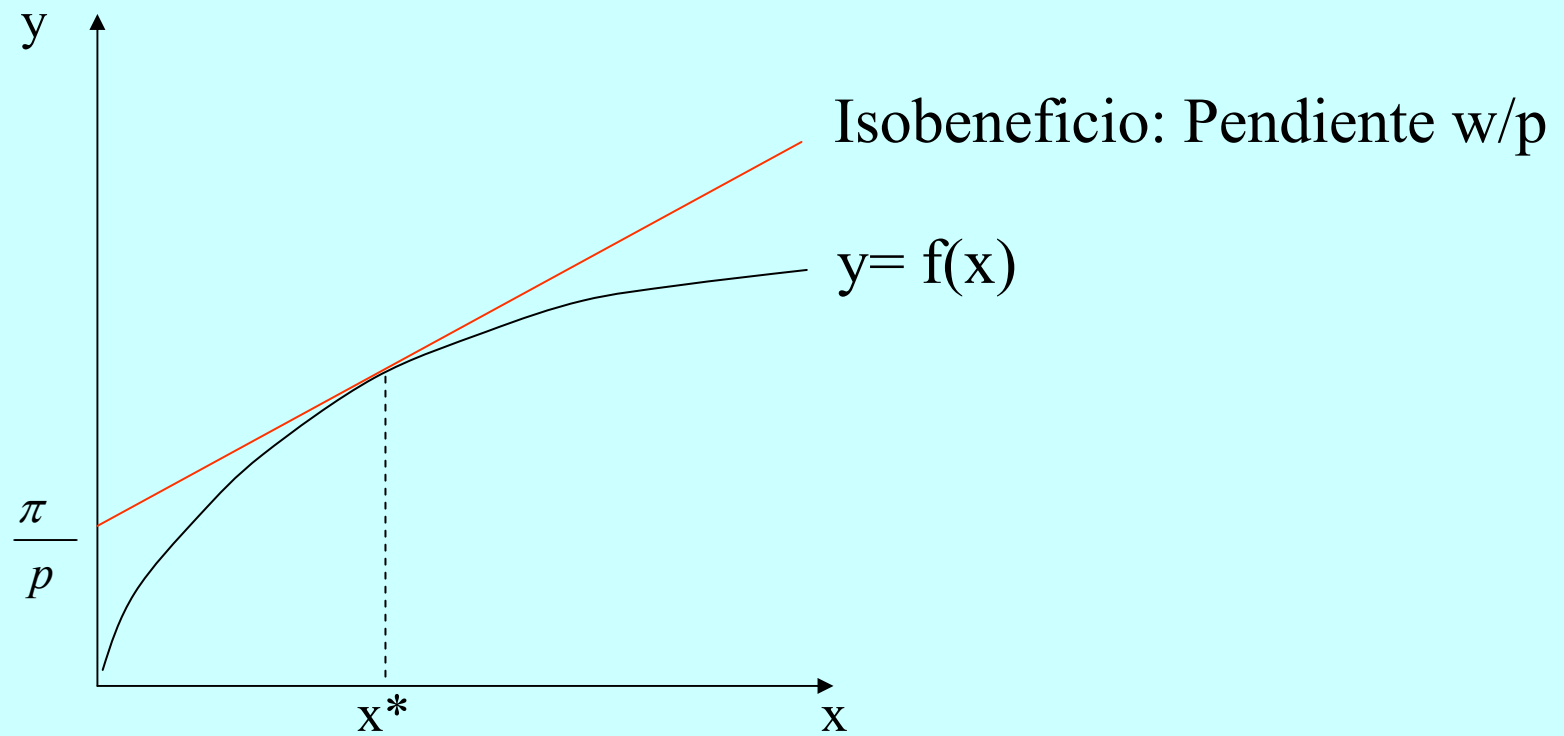
$$s.a. \ y = f(x_1, x_2)$$

(1) *Condicioness de primer orden :*

$$p \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} = w_i \quad i = 1, 2$$

$$MR = MC \rightarrow \underline{x}^*(p, w), \underline{y}^*(p, w)$$

Maximización del beneficio



Maximización del beneficio

(2) *Condición de segundo orden:*

$$D^2 f(x) = \left[\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \rightarrow \textit{negativa semidefinida}$$

$$h' D^2 f(x) h \leq 0$$

Maximización del beneficio

□ Función de beneficios:

$$\pi(\underline{p}, \underline{w}) = \underline{p} \underline{y}^*(\underline{p}, \underline{w}) - \underline{w} \underline{x}^*(\underline{p}, \underline{w})$$

$$\begin{cases} \pi(\underline{p}, \underline{w}) = \max_{\underline{y}, \underline{x}} \{ \underline{p}' \underline{y} - \underline{w}' \underline{x} \} \\ s.a. \underline{y} \in Y \end{cases}$$

Maximización del beneficio

□ Propiedades de la Función de beneficios:

1. No decreciente en \underline{p} , no creciente en \underline{w}
2. Homogénea de grado 1 en $(\underline{p}, \underline{w})$

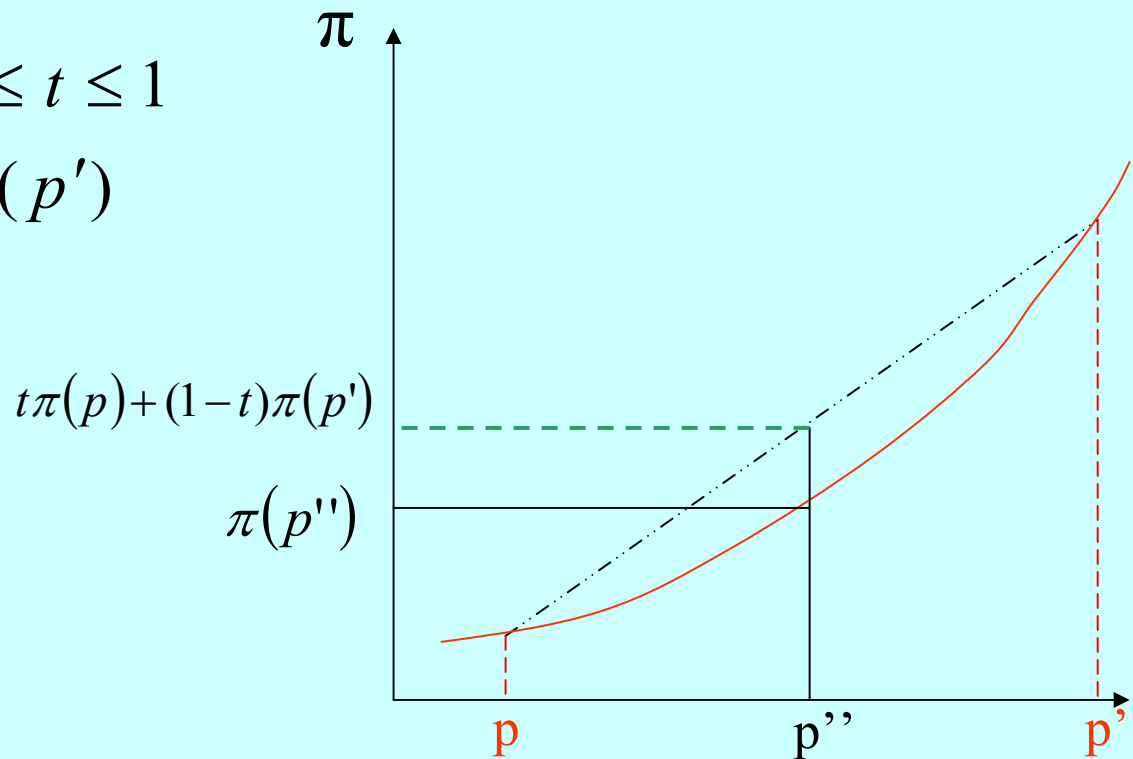
Maximización del beneficio

□ Propiedades de la Función de beneficios:

■ Convexa en $(\underline{p}, \underline{w})$

$$p'' = tp + (1 - t)p' \quad ; 0 \leq t \leq 1$$

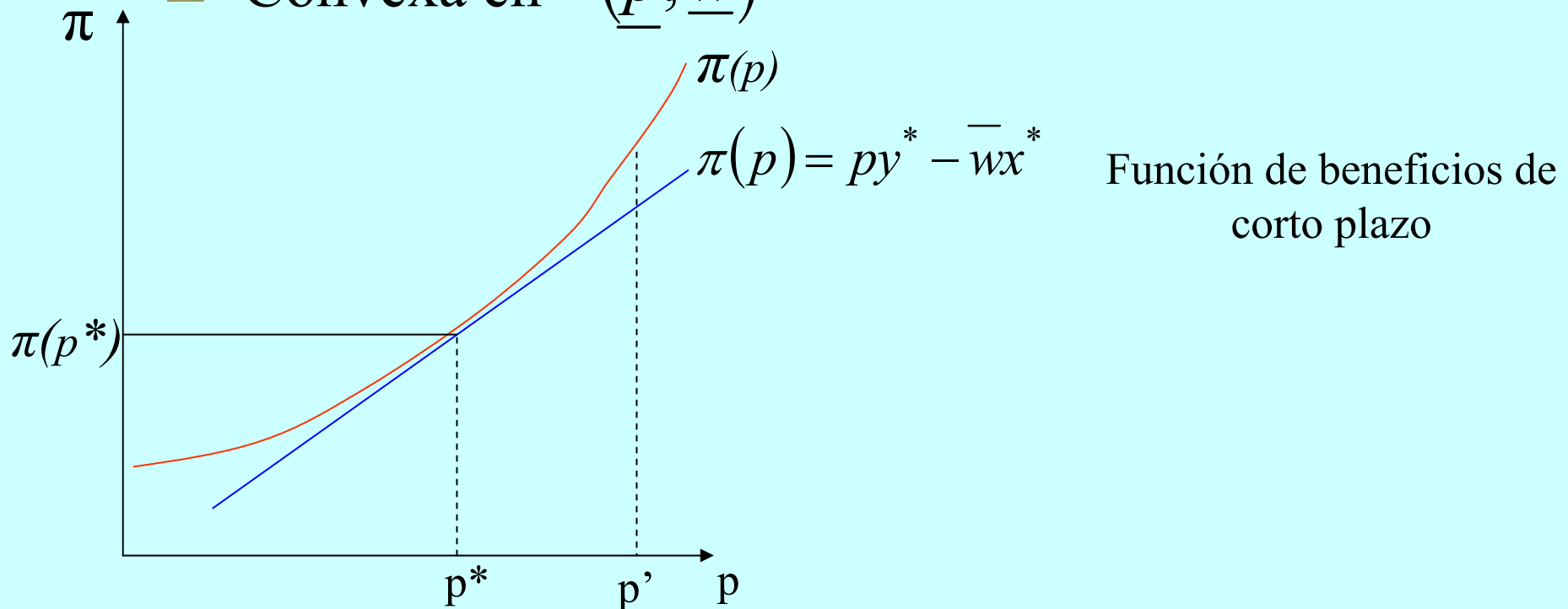
$$\pi(p'') \leq t\pi(p) + (1 - t)\pi(p')$$



Maximización del beneficio

□ Propiedades de la Función de beneficios:

■ Convexa en $(\underline{p}, \underline{w})$

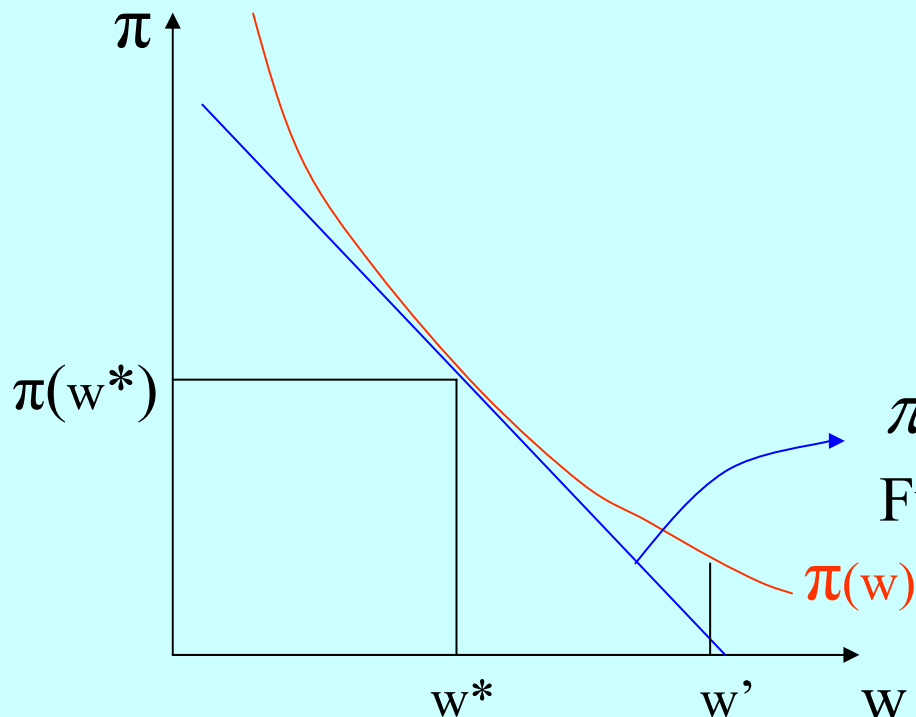


$\Delta p \Rightarrow \Delta \pi(p)$ más que proporcional (efecto sustitución)

Maximización del beneficio

□ Propiedades de la Función de beneficios:

3. Convexa en $(\underline{p}, \underline{w})$



$$\pi(p) = \bar{p}y^* - wx^*$$

Función de beneficios de corto plazo

Maximización del beneficio

□ Propiedades de la Función de beneficios:

4. Continuidad de $\pi(\underline{p}, \underline{w})$, $\forall \underline{p} \gg 0, \underline{w} \gg 0$

5. Lema de Hotelling

$$\pi(\underline{p}, \underline{w}) = \underline{p}' y(\underline{p}, \underline{w}) - \underline{w}' x(\underline{p}, \underline{w})$$
$$\frac{\partial \pi(\underline{p}, \underline{w})}{\partial p_i} = y_i(\underline{p}, \underline{w}) \quad i = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial \pi(\underline{p}, \underline{w})}{\partial w_j} = -x_j(\underline{p}, \underline{w}) \quad j = 1, \dots, n$$

Maximización del beneficio

□ Propiedades de la Función de beneficios:

5. Lema de Hotelling

$$\pi(\underline{p}, \underline{w}) = \max_{x, y} \{ \underline{p}' f(\underline{x}) - \underline{w}' \underline{x} \} \rightarrow \text{función objetivo}$$

$$\underline{p} \frac{\nabla f(\underline{x})}{\nabla \underline{x}} = \underline{w} \rightarrow x^*(\underline{p}, \underline{w})$$

$$\pi(\underline{p}, \underline{w}) = \underline{p}' f(\underline{x}(\underline{p}, \underline{w})) - \underline{w}' \underline{x}(\underline{p}, \underline{w}) \rightarrow \text{función objetivo indirecta}$$

Maximización del beneficio

□ Propiedades de la Función de beneficios:

5. Lema de Hotelling

$$\begin{aligned}\frac{\nabla \pi(\underline{p}, \underline{w})}{\nabla \underline{w}} &= \underline{p} \frac{\nabla f}{\nabla \underline{x}} \frac{\nabla \underline{x}}{\nabla \underline{w}} - \underline{w} \frac{\nabla \underline{x}}{\nabla \underline{w}} - \underline{x}(p, w) \\ &= \frac{\nabla \underline{x}}{\nabla \underline{w}} \left(\underbrace{\underline{p} \frac{\nabla f}{\nabla \underline{x}} - \underline{w}}_{=0 \text{ por c.p.o.}} \right) - \underline{x}(p, w) \Rightarrow \boxed{\frac{\nabla \pi(\underline{p}, \underline{w})}{\nabla \underline{w}} = -\underline{x}(p, w)}\end{aligned}$$

Maximización del beneficio

□ Propiedades de la Función de beneficios:

5. Lema de Hotelling

$$\frac{\partial \pi(\underline{p}, \underline{w})}{\partial w_i} = -x_i(\underline{p}, \underline{w}) \quad \Delta w \begin{cases} \downarrow \pi | x \rightarrow \text{efecto directo} \\ \downarrow x \rightarrow \pi \text{ efecto indirecto} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \pi(\underline{p}, \underline{w})}{\partial p_j} = f_j(x(\underline{p}, \underline{w})) \quad \Delta p \begin{cases} \uparrow \pi | y \rightarrow \text{efecto directo} \\ \uparrow y \rightarrow \pi \text{ efecto indirecto} = 0 \end{cases}$$

Propiedades, funciones de oferta y demanda derivada de factores

1) π es función monótona en precios:

$$\frac{\partial \pi(p, w)}{\partial p_i} \geq 0 \quad \frac{\partial \pi(p, w)}{\partial w_j} \leq 0$$

2) y_i , $-X_j$ son homogéneas de grado 0 en precios

Propiedades, funciones de oferta y demanda derivada de factores

- 3) Matriz de segundas derivadas de $\pi(p,w)$ = matriz de primeras derivadas de $x^*(p,w)$ e $y^*(p,w)$ y es semidefinida positiva.

$$D^2\pi(\underline{p}, \underline{w}) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i \partial p_j} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial w_j \partial p_i} \\ \hline \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i \partial w_j} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial w_i \partial w_j} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial y_j}{\partial p_j} & \frac{\partial y_i}{\partial w_j} \\ \hline -\frac{\partial x_j}{\partial p_i} & -\frac{\partial x_j}{\partial w_i} \end{array} \right]$$

Matriz de substitución

Propiedades, funciones de oferta y demanda derivada de factores

3) a) Elementos de la diagonal principal no negativos

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i^2} = \frac{\partial y_i}{\partial p_i} \geq 0 \quad \rightarrow \text{oferta : pendiente positiva}$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial w_j^2} = - \frac{\partial x_j}{\partial w_j} \geq 0 \quad \rightarrow \text{demanda : pendiente negativa}$$

Propiedades, funciones de oferta y demanda derivada de factores

3) b) Los efectos cruzados son simétricos (matriz de sustitución simétrica)

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial y_j}{\partial p_i}$$

$$-\frac{\partial x_i}{\partial w_j} = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial w_i \partial w_j} = -\frac{\partial^2 \pi}{\partial w_j \partial w_i} = -\frac{\partial x_j}{\partial w_i}$$

$$-\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial w_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_j \partial w_i} = \frac{\partial y_j}{\partial w_i}$$

Ejemplo de maximización de beneficios

□ Un producto – Un insumo:

$$\max_x py - wx$$

$$s / a : y = f(x) = x^a \quad ; \quad a > 0$$

$$\text{Condición de primer orden : } pax^{a-1} = w$$

$$\text{Condición de segundo orden : } pa(a-1)x^{a-2} \leq 0$$

$$x^*(p, w) = \left[\frac{w}{ap} \right]^{\frac{1}{a-1}} \quad ; \quad y^*(p, w) = \left[\frac{w}{ap} \right]^{\frac{a}{a-1}}$$

$$\pi(p, w) = py^* - wx^* = p \left[\frac{w}{ap} \right]^{\frac{a}{a-1}} - w \left[\frac{w}{ap} \right]^{\frac{1}{a-1}}$$

Principio de Le Chatelier

z factor fijo

\underline{x} factores variables

$\pi_{cp}(\underline{p}, z) \rightarrow$ corto plazo

$\pi_{lp}(\underline{p}) \rightarrow$ largo plazo $z = z(p)$

Principio de Le Chatelier

$$\pi_{\text{lp}}(\underline{p}^*) = \pi_{\text{cp}}(\underline{p}^*, z(\underline{p}^*))$$

$$h(\underline{p}) = \pi_{\text{lp}}(\underline{p}) - \pi_{\text{cp}}(\underline{p}, z) \geq 0$$

$$\text{en } \underline{p}^* \rightarrow z^* = z(\underline{p}^*) \rightarrow h(\underline{p}) = 0 \rightarrow \text{CP} = \text{LP}$$

Principio de Le Chatelier

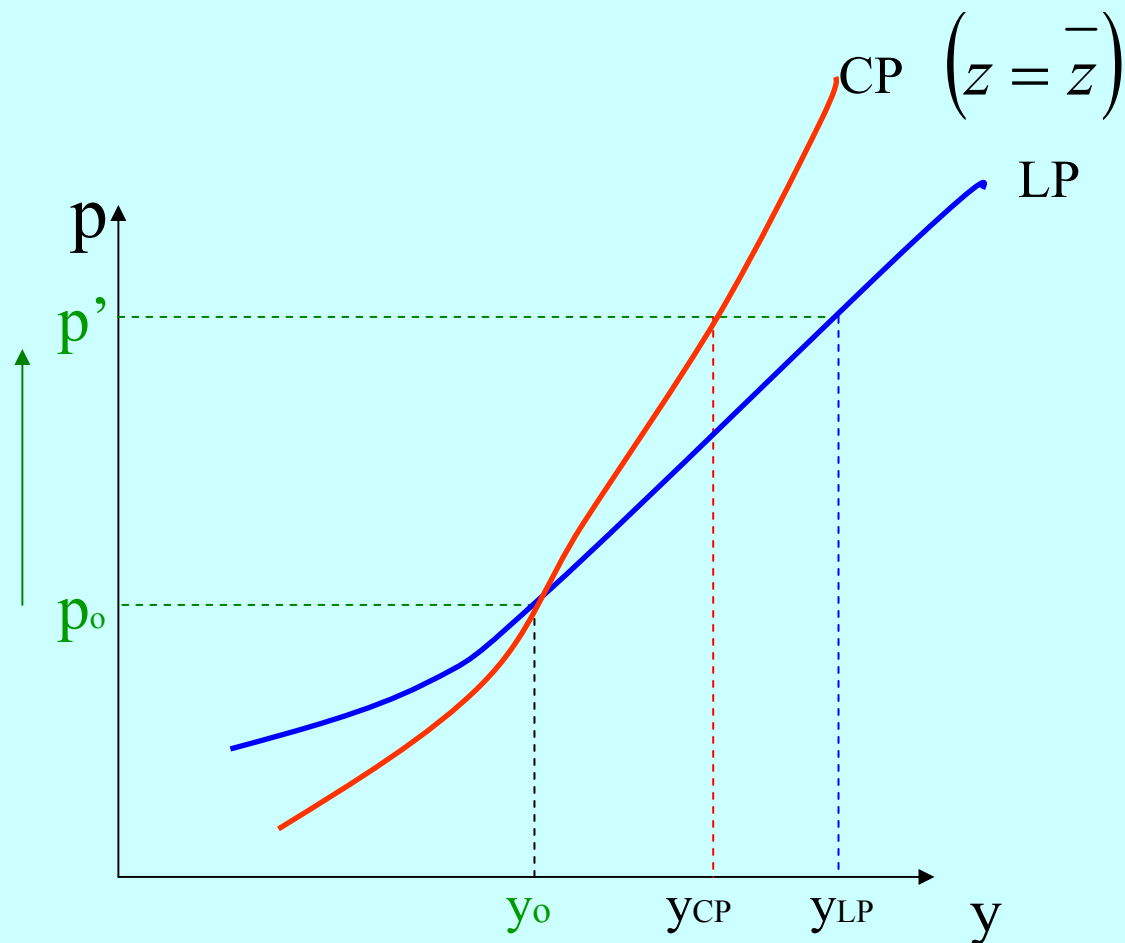
$$a) \left. \frac{\partial h(p)}{\partial p} \right|_{p=p^*} = 0 \text{ mínimo}$$

Largo plazo es envolvente de corto plazo (tangente)

b) Segunda derivada en $p = p^*$ es no negativa

$$\frac{\partial^2 \pi_{lp}}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 \pi_{cp}}{\partial p^2} = \frac{\partial y(p^*)}{\partial p} - \frac{\partial y(p^*, \bar{z})}{\partial p} \geq 0$$

Principio de Le Chatelier: Ejemplo – Cobb-Douglas



$$\frac{\partial y(p^*)}{\partial p} - \frac{\partial y(p^*, \bar{z})}{\partial p} \geq 0$$

Función de beneficios restringida

$$\left. \begin{array}{l} \underline{y} = (\underline{y}_m, \underline{y}_r) \\ \underline{x} = (\underline{x}_m, \underline{x}_r) \end{array} \right\} m = \text{variables}; r = \text{racionados}$$

$$\pi(\underline{p}_m, \underline{w}_m, \underline{y}_r, \underline{x}_r) = \max_{\underline{y}_m, \underline{x}_m} \left\{ \underline{p}_m \underline{y}_m + \underline{p}_r \underline{y}_r - \underline{w}_m \underline{x}_m - \underline{w}_r \underline{x}_r \right\}$$

s.a. $(\underline{y}, \underline{x}) \in Y(\underline{y}_r, \underline{x}_r)$

Función de beneficios restringida

$$\pi(\underline{p}_m, \underline{w}_m, \underline{y}_r, \underline{x}_r) = \underline{p}_r \underline{y}_r - \underline{w}_r \underline{x}_r + \max_{y_m, x_m} (\underline{p}_m \underline{y}_m - \underline{w}_m \underline{x}_m) \\ \text{s.a. } (\underline{y}, \underline{x}) \in Y(\underline{y}_r, \underline{x}_r)$$

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial p_{m_i}} = y_{m_i}(\underline{p}_m, \underline{w}_m, \underline{y}_r, \underline{x}_r) \quad i = 1, \dots, I$$

$$\frac{\partial \pi(\cdot)}{\partial w_{m_j}} = -x_{m_j}(\underline{p}_m, \underline{w}_m, \underline{y}_r, \underline{x}_r) \quad j = 1, \dots, J$$

Función de beneficios restringida

$$\frac{\partial \pi(.)}{\partial y_{r_s}} = -p_{r_s}(p_m, w_m, y_r, x_r) \quad s = 1, \dots, S$$

$$\frac{\partial \pi(.)}{\partial x_{r_l}} = w_{r_l}(p_m, w_m, y_r, x_r) \quad l = 1, \dots, L$$

Precios sombra o inversa de la oferta

Aplicación teorema de la envolvente

Función de Ingresos

- Todos los insumos son fijos $y(\underline{p}, \underline{x})$
- $\underline{x}, \underline{p}, \underline{w}$ están dados, fijos

$$r(\underline{p}, \underline{x}) = \max_{\underline{y}} \{ \underline{p}' \underline{y} : (\underline{x}, \underline{y}) \in T \}$$



$y^*(\underline{p}, \underline{x})$ oferta condicionada de productos

Función de Ingresos

□ x : escalar

$$\begin{array}{l} \max_y \{ \underline{p}' \underline{y} \} \\ s.a. \quad V(\underline{y}) = x \end{array}$$

$$L = \underline{p}' \underline{y} + \lambda [x - V(\underline{y})]$$

Función de Ingresos

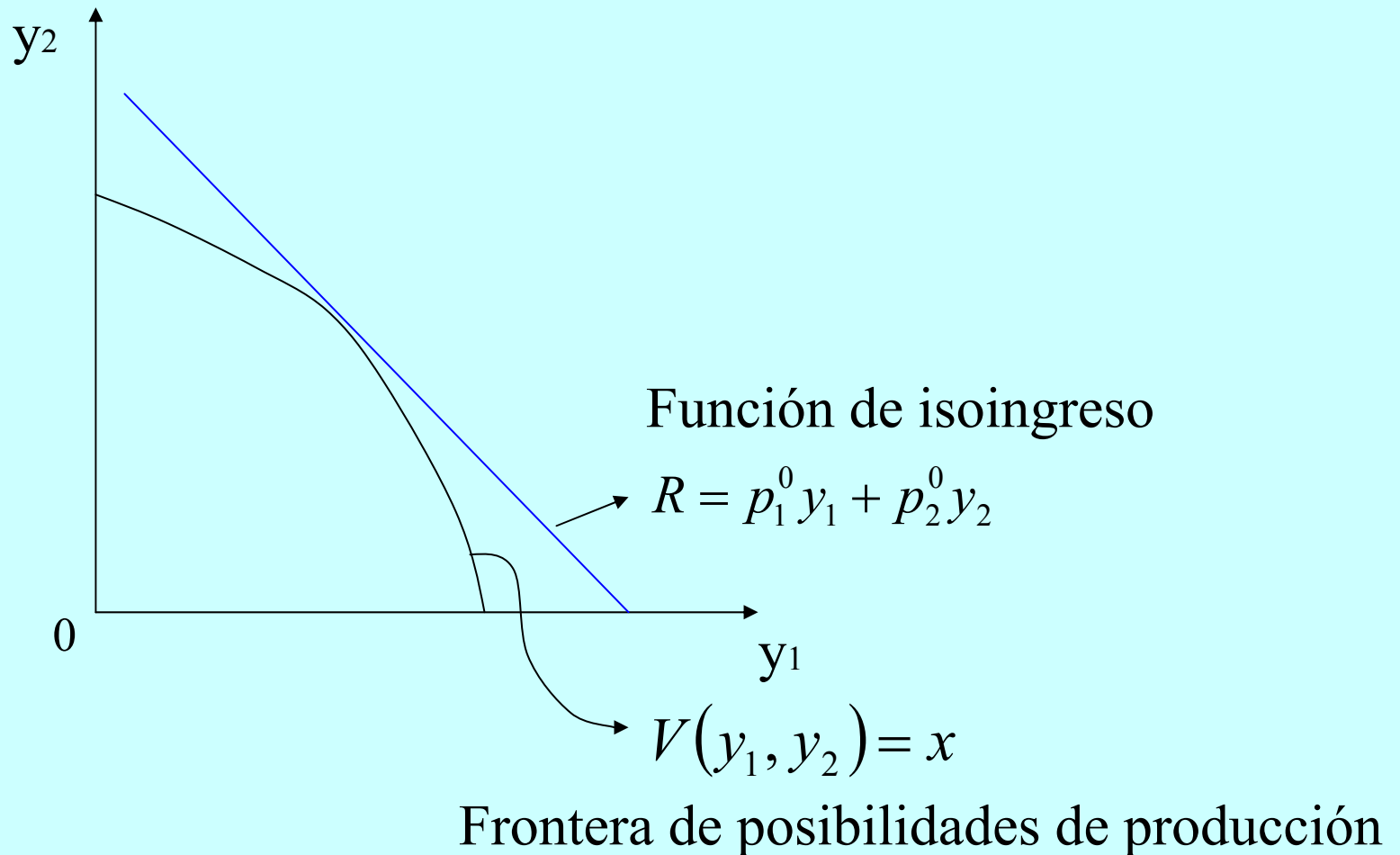
Condiciones de primer orden :

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = p_i - \lambda \frac{\partial V(\underline{y})}{\partial y_i} = 0 \quad i = 1, \dots, I$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x - V(\underline{y}) = 0$$

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\cancel{\partial V(y)} / \partial y_i}{\cancel{\partial V(y)} / \partial y_j} \rightarrow y(\underline{p}, \underline{x})$$

Función de Ingresos

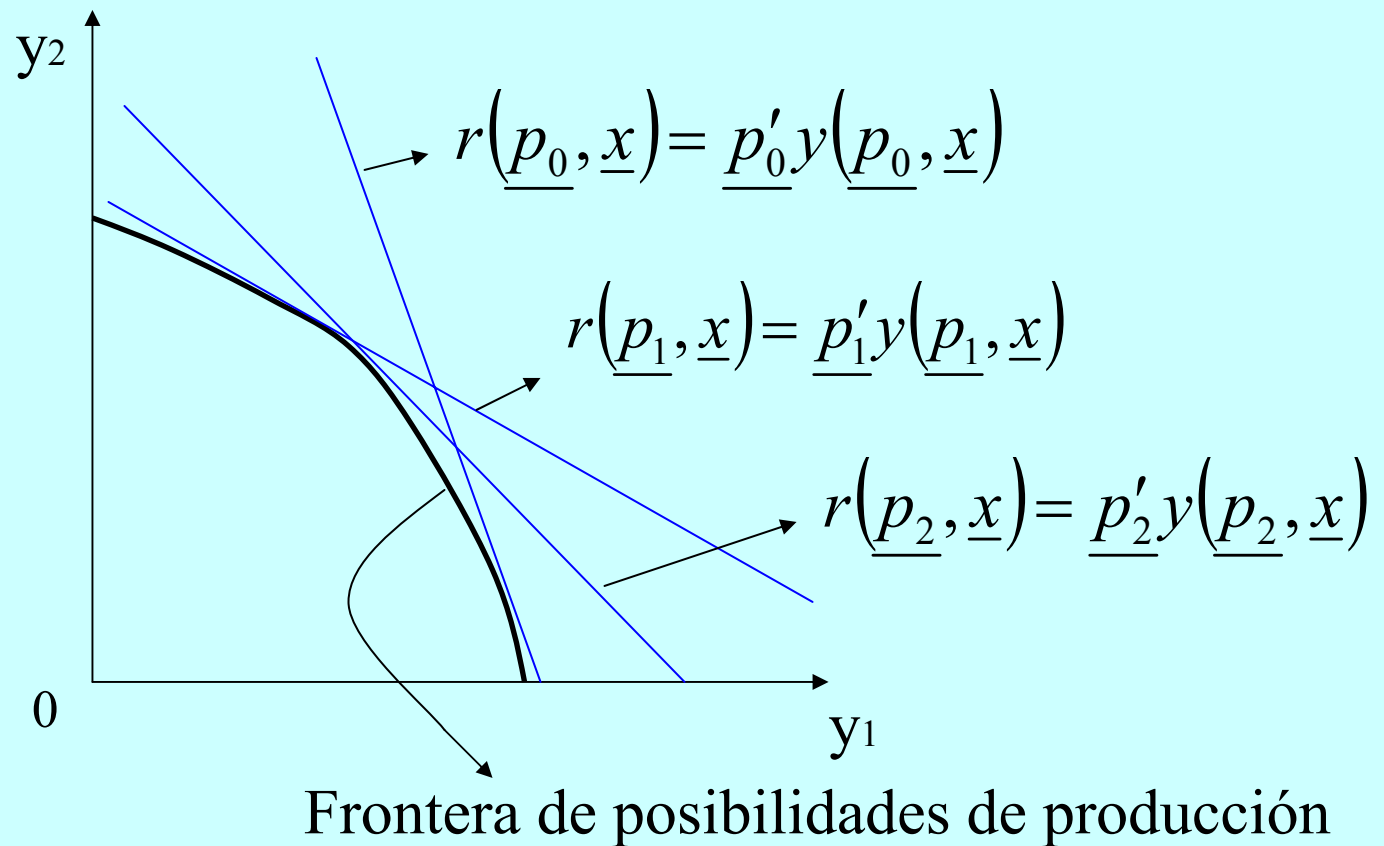


Función de Ingresos

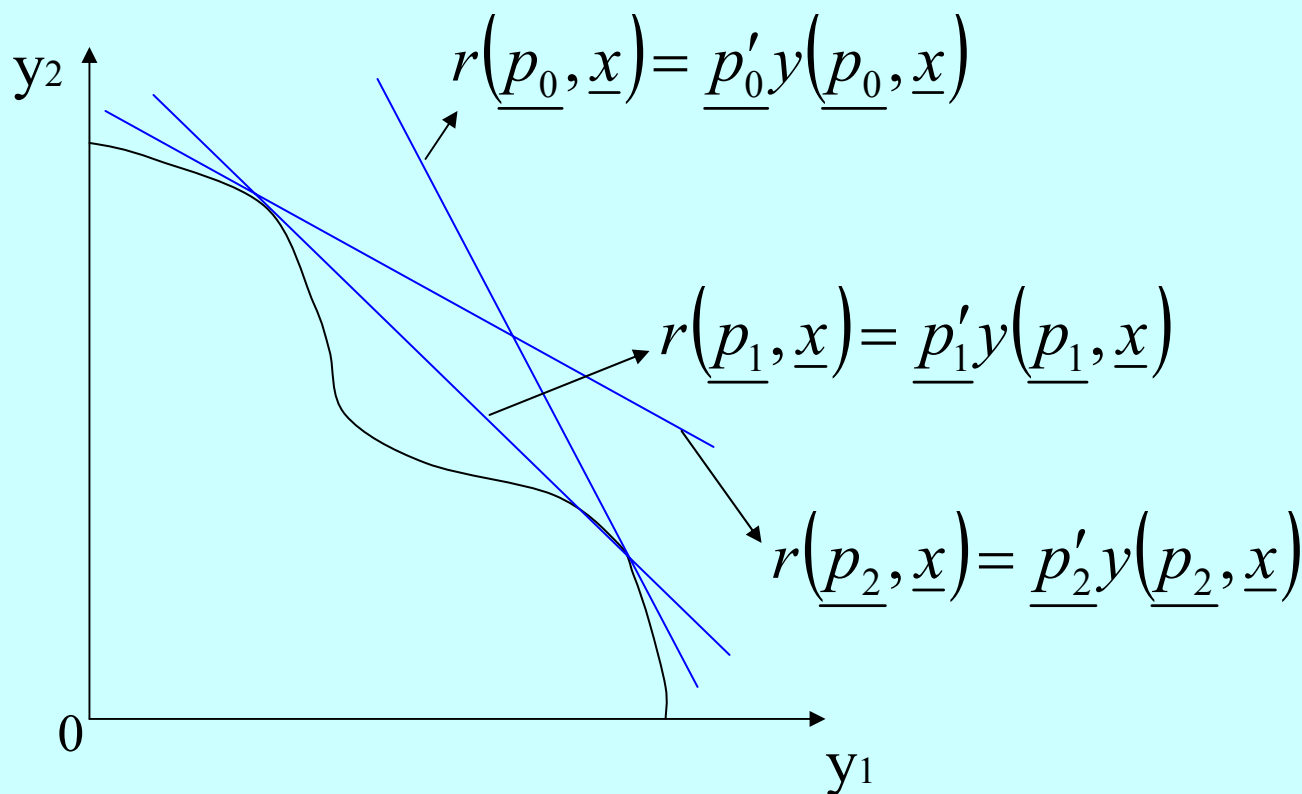
Condición de segundo orden :

$D^2V(y)$ positiva semidefinida

Propiedades de la función de ingresos



Propiedades de la función de ingresos (FPP no convexa)



Propiedades de la función de ingresos

$$r(\underline{p}, \underline{x}) = \max\{p \cdot y : y \in Y(x), p > 0\}$$

1. No decreciente en precios

2. No decreciente en insumos

3. Homogénea de grado 1 en precios

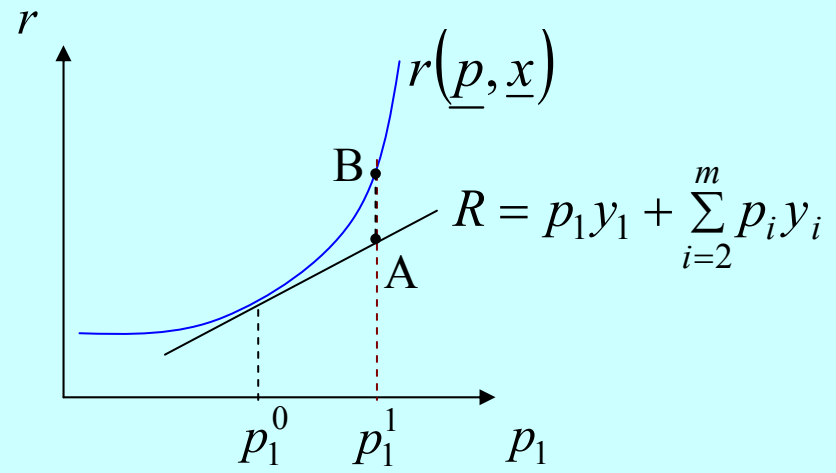
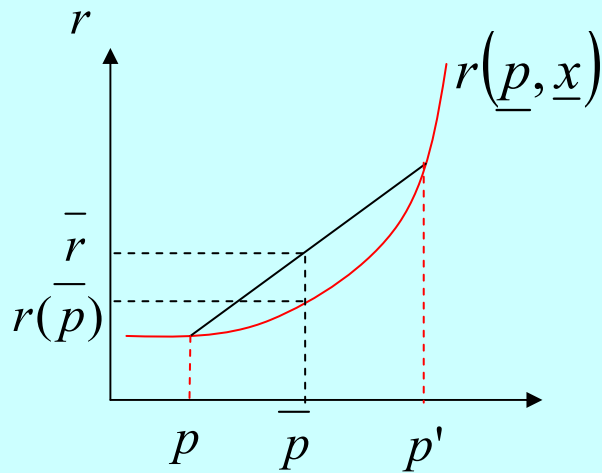
$$r(t\underline{p}, \underline{x}) = tr(\underline{p}, \underline{x}) \quad ; \quad t > 0$$

Propiedades de la función de ingresos

$r(\underline{p}, \underline{x})$

4. Convexa en precios

$$r(tp + (1-t)p', \underline{x}) \leq tr(p, \underline{x}) + (1-t)r(p', \underline{x})$$



Propiedades de la función de ingresos

$$r(\underline{p}, \underline{x})$$

5. Es una función continua

6. Lema de Shephard: oferta condicionada

$$\frac{\partial r(\underline{p}, \underline{x})}{\partial p_i} = y_i(\underline{p}, \underline{x}) ; i = 1, \dots, m$$

Propiedades de la oferta condicionada

$$y_i(\underline{p}, \underline{x})$$

1. Es monótona en precios $\frac{\partial r(\underline{p}, \underline{x})}{\partial p_i} \geq 0$

2. Homogénea de grado cero en precios

Propiedades de la oferta condicionada

$$y_i(\underline{p}, \underline{x})$$

3. Matriz de transformación simétrica y positiva definida:

- a) Efecto propio positivo
- b) Simétrica - efectos cruzados

$$\frac{\partial^2 r(\underline{p}, \underline{x})}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial y_i}{\partial p_j} = \begin{cases} > 0 \text{ complementarios} \\ < 0 \text{ sustitutos} \end{cases}$$

Econometría

□ Modelo Estructural:

$$\left. \begin{aligned} q^D &= a_0 - a_1 p + a_2 z_1 + \varepsilon_1 \\ q^S &= b_0 + b_1 p + b_2 z_2 + \varepsilon_2 \\ q^D &= q^S \end{aligned} \right\}$$

□ Modelo Reducido:

$$p = \frac{a_0 - b_0}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_1 + b_1} z_1 - \frac{b_2}{a_1 + b_1} z_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a_1 + b_1}$$

$$p = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \varepsilon_3$$

Econometría

□ Maximización de beneficios

□ 1 insumo, x

□ 1 producto, y $y = x^a \quad ; a > 0$

$$x(p, w) = \left[\frac{w}{ap} \right]^{\frac{1}{a-1}}$$

$$y(p, w) = \left[\frac{w}{ap} \right]^{\frac{a}{a-1}}$$

Econometría

$$\log x = \frac{1}{a-1} \log w - \left[\frac{1}{a-1} \log a + \frac{1}{a-1} \log p \right]$$

$$\log y = \frac{a}{a-1} \log w - \left[\frac{a}{a-1} \log a + \frac{a}{a-1} \log p \right]$$

Econometría

$$\log x = \beta_{01} + \beta_{11} \log w + \beta_{21} \log p$$

$$\log y = \beta_{02} + \beta_{12} \log w + \beta_{22} \log p$$

$$\beta_{02} = a\beta_{01}$$

$$\beta_{12} = a\beta_{11}$$

Econometría

$$\pi = w \left(\frac{1-a}{a} \right) \left(\frac{w}{ap} \right)^{\frac{1}{a-1}}$$

$$\begin{aligned} \log \pi &= \log w + \log \left(\frac{1-a}{a} \right) + \frac{1}{a-1} \log w - \frac{1}{a-1} \log a \\ &\quad - \frac{1}{a-1} \log p \end{aligned}$$

Econometría

$$\log \pi = \gamma_0 + \gamma_1 \log w + \gamma_2 \log p$$

$$\gamma_0 = \log \left(\frac{1-a}{a} \right) - \frac{1}{a-1} \log a$$

$$\gamma_1 = \frac{a}{a-1}$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{a-1}$$

Econometría: Leontieff Generalizada

$$\begin{aligned}\pi(\underline{p}, \underline{w}) = & \sum_{i=1}^n b_{ii} w_i + \sum_{i=1}^m a_{ii} p_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n b_{ij} (w_i w_j)^{1/2} \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i}^m a_{ij} (p_i p_j)^{1/2} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} (p_i w_j)^{1/2}\end{aligned}$$

$$b_{ij} = b_{ji}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

Econometría: Leontieff Generalizada

$$\frac{\partial \pi}{\partial w_i} = -x_i(\underline{p}, \underline{w}) = b_{ii} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \left(\frac{w_j}{w_i} \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^m c_{ij} \left(\frac{p_j}{w_i} \right)^{1/2}$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_i} = y_i(\underline{p}, \underline{w}) = a_{ii} + \sum_{j=1}^m a_{ij} \left(\frac{p_j}{p_i} \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^n c_{ij} \left(\frac{w_j}{p_i} \right)^{1/2}$$

$$i = 1, \dots, m$$

Econometría: Translogarítmica

$$\begin{aligned}\log \pi(\underline{p}, \underline{w}) = & a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \log w_i + \sum_{i=1}^m b_i \log p_i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \log w_i \log w_j \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_{ij} \log p_i \log p_j \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} \log w_i \log p_j\end{aligned}$$

Econometría: Translogarítmica

□ Simetría

$$b_{ij} = b_{ji}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$c_{ij} = c_{ji}$$

□ Homogeneidad de grado 1 en precios

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^m b_i = 1 \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} + \sum_{j=1}^m c_{ij} = 0 \\ \sum_{j=1}^m b_{ij} + \sum_{j=1}^n c_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

Econometría: Translogarítmica

$$\frac{\partial \ln \pi}{\partial \ln p_i} = \frac{\partial \pi}{\partial p_i} \frac{p_i}{\pi} = \frac{y_i p_i}{\pi}$$

$$= S_i(\underline{p}, \underline{w}) = b_i + \sum_{j=1}^m b_{ij} \ln p_j + \sum_{j=1}^n c_{ij} \ln w_j$$

$$i = 1, \dots, m$$

Econometría: Translogarítmica

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln \pi}{\partial \ln w_i} &= \frac{\partial \pi}{\partial w_i} \frac{w_i}{\pi} = - \frac{x_i w_i}{\pi} \\ &= -S_i(\underline{p}, \underline{w}) = a_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \ln w_j + \sum_{j=1}^m c_{ij} \ln p_j\end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, n$$

Fulginiti and Perrin (*AJAE* 1990)

$$\pi(p, r; z) = \max_{xy} \{py - rx; (y, x; z) \in T\}$$

- p , is a vector of m output prices
- r , is a vector of n input prices
- x , is a vector of n input quantities
- z , is a vector of l fixed factors
- T is a production possibility set

Fulginiti and Perrin (*AJAE*, 1990)

$$(2) \quad \frac{\delta \pi}{\delta p_i}(p, r; z) = y_i^*(p, r; z) \quad i = 1, \dots, m$$
$$\frac{\delta \pi}{\delta r_h}(p, r; z) = -x_h^*(p, r; z) \quad h = 1, \dots, n$$

Fulginiti and Perrin

□ Modelo: translogarítmica

$$(3) \quad \tilde{\pi} = \alpha_0 + \alpha \tilde{d} + \frac{1}{2} \tilde{d}' \beta \tilde{d}$$

where

$$\tilde{\pi} = \ln \pi$$
$$\tilde{d} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{r} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln p \\ \ln r \\ \ln z \end{bmatrix} .$$

Fulginiti and Perrin

$$(5) \quad B_{hk} = \delta \left(\ln \frac{x_k^*}{x_h^*} \right) / \delta \bar{z} \gamma \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$$

$$(6) \quad \hat{B}_{hk} = \frac{\hat{\beta}_{k\bar{z}\gamma}}{M_k} - \frac{\hat{\beta}_{h\bar{z}\gamma}}{M_h}$$

Fulginiti and Perrin

Parameters are estimated using time series data for years 1940-1980

Output categories:

wheat, corn, grain sorghum, sunflower, linseed, soybeans and beef.

Variable inputs:

Labor, capital, and aggregate of fertilizers, seeds and chemicals

Fixed inputs:

Land, precipitation, and time in years,(proxy for tech change)

Fulginiti and Perrin

Table 1. Condiciones de Homogeneidad y Simetría Impuestas

Symmetry	$\beta_{ij} = \beta_{ji}; \quad \forall i, j$ $\beta_{hk} = \beta_{kh}; \quad \forall h, k$ $\beta_{ik} = \beta_{ki}; \quad \forall i, k$
Homogeneity in prices	$\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{h=1}^n \alpha_h = 1$ $\sum_{j=1}^m \beta_{ij} + \sum_{k=1}^n \beta_{ik} = 0; \quad \forall i = 1, \dots, m$ $\sum_{j=1}^m \beta_{hj} + \sum_{k=1}^n \beta_{hk} = 0; \quad \forall h = 1, \dots, n$ $\sum_{j=1}^m \beta_{rj} + \sum_{k=1}^n \beta_{rk} = 0; \quad \forall r = 1, \dots, l$
Homogeneity in fixed inputs	$\sum_{r=1}^l \beta_{ir} = 0; \quad \forall i = 1, \dots, m$ $\sum_{r=1}^l \beta_{hr} = 0; \quad \forall h = 1, \dots, n$

Fulginiti and Perrin

Table 2. Parameter Estimates Restricted for Symmetry and Homogeneity

Dependent Variable	Price of													
	Intercept	Beef	Wheat	Corn	Sunflower	Linseed	Soybean	Sorghum	Capital	Labor	Others	Land	Rain	Time
Beef	6.432 (2.51) ^a	1.165 (0.344)	-0.837 (0.217)	-0.410 (0.115)	-0.136 (0.093)	-0.099 (0.068)	-0.012 (0.040)	-0.133 (0.069)	0.099 (0.291)	0.266 (0.171)	0.098 (0.086)	0.0658 (0.122)	-0.0093 (0.179)	-0.057 (0.089)
Wheat	0.466 (1.97)		1.307 (0.206)	-0.477 (0.087)	-0.034 (0.066)	-0.119 (0.040)	0.028 (0.037)	-0.179 (0.043)	0.174 (0.233)	-0.034 (0.130)	0.171 (0.069)	0.208 (0.094)	-0.202 (0.140)	0.006 (0.071)
Corn	-1.446 (0.958)			0.884 (0.077)	-0.108 (0.043)	-0.038 (0.029)	0.004 (0.022)	0.012 (0.030)	0.093 (0.102)	0.002 (0.058)	0.038 (0.035)	-0.015 (0.041)	0.297 (0.063)	-0.282 (0.035)
Sunflower	-0.983 (0.656)				0.279 (0.044)	0.038 (0.024)	-0.009 (0.015)	0.006 (0.025)	-0.091 (0.074)	0.037 (0.048)	0.016 (0.024)	0.033 (0.031)	-0.045 (0.046)	0.012 (0.024)
Linseed	-0.338 (0.366)					0.089 (0.029)	0.013 (0.010)	0.007 (0.023)	0.045 (0.037)	0.062 (0.030)	0.002 (0.014)	0.016 (0.016)	0.066 (0.022)	-0.094 (0.031)
Soybean	-0.359 (0.326)						0.050 (0.012)	0.010 (0.011)	-0.059 (.036)	-0.009 (0.021)	-0.017 (0.013)	0.021 (0.016)	-0.045 (0.023)	0.024 (0.013)
Sorghum	-0.153 (0.373)							0.240 (0.034)	-0.007 (0.038)	0.004 (0.033)	0.041 (0.017)	-0.046 (0.018)	0.030 (0.024)	0.016 (0.014)
Capital	-1.050 (2.967)								-0.099 (0.346)	0.001 (0.192)	-0.155 (0.096)	-0.164 (0.140)	-0.108 (0.211)	0.272 (0.104)
Labor	0.380 (1.65)									-0.224 (0.115)	-0.105 (0.054)	-0.095 (0.079)	-0.030 (0.118)	0.125 (0.059)
Others	-1.949 (0.856)										-0.089 (0.034)	-0.024 (0.040)	0.046 (0.061)	-0.022 (0.031)

Note: Weighted mean square error for system = 1.598 with 297 degrees of freedom.

^a Standard errors in parentheses.

Fulginiti and Perrin

Table 3. Estimated Own- and Cross-Price Elasticities

Quantity of:	Price of									
	Beef	Wheat	Corn	Sunflower	Linseed	Soybean	Sorghum	Capital	Labor	Others
Beef	1.17	0.10	0.08	0.03	0.02	0.02	-0.02	-0.95	-0.26	-0.20
Wheat	0.15	1.42	-0.15	0.10	-0.04	0.07	-0.12	-0.82	-0.53	-0.07
Corn	0.22	-0.29	1.48	-0.11	0.02	0.04	0.12	-0.82	-0.48	-0.19
Sunflower	0.22	0.58	-0.33	1.10	0.38	-0.03	0.14	-1.67	-0.23	-0.17
Linseed	0.27	-0.26	0.08	0.49	-0.08	0.15	0.16	-0.62	0.08	-0.27
Soybean	0.78	1.75	0.57	-0.14	0.54	0.66	0.42	-2.96	-0.78	-0.85
Sorghum	-0.19	-1.03	0.55	0.21	0.18	0.13	1.56	-1.11	-0.44	0.14
Capital	1.08	0.65	0.34	0.23	0.07	0.09	0.10	-1.94	-0.49	-0.13
Labor	0.63	0.89	0.43	0.07	-0.02	0.05	0.09	-1.03	-1.03	-0.07
Others	0.83	0.21	0.29	0.08	0.10	0.09	-0.05	-0.48	-0.12	-0.97

Fulginiti and Perrin

Table 4. Estimated Farm Price Changes Due to Elimination of Policies

Commodity	Policy Set				
	Export Taxes	Import Restrictions	Overvalued Currency	Domestic Taxes	Minimum Wages
	----- (price change in %) -----				
Beef	10	0	18	0	0
Wheat	25	0	18	0	0
Corn	25	0	18	0	0
Sunflower	25	0	18	0	0
Linseed	25	0	18	0	0
Soybean	15	0	18	0	0
Sorghum	25	0	18	0	0
Capital	0	-26	18	-18	0
Labor	0	0	0	-13	-10
Others	0	-26	18	-18	0

Fulginiti and Perrin

$$(7) \quad \begin{bmatrix} \delta \ln y \\ \delta \ln x \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} \delta \ln p \\ \delta \ln r \end{bmatrix}$$

Fulginiti and Perrin (AJAE 1990)

Table 7. Estimated Quantity Changes from Elimination of Policies

Commodity	Policy Set ^a				
	Export Taxes	Import Restrictions	Overvalued Currency	Domestic Taxes	Minimum Wages
	----- (quantity change in %) -----				
Beef	17	30	5	24	3
Wheat	33	23	10	23	5
Corn	34	26	9	24	5
Sunflower	49	48	4	36	2
Linseed	15	23	-2	15	-1
Soybean	96	99	14	79	8
Sorghum	37	25	8	23	4
Weighted output	27	29	7	25	4
Capital	47	54	9	44	5
Labor	43	29	18	33	10
Others	26	38	2	28	1
Weighted input	43	44	10	38	6

^a Predicted from equation (7) and the price changes in table 5 with variables at sample mean.